EEM102 Lineer Cebir

Bölüm - 1

Dr. Öğr. Üyesi Başak Esin KÖKTÜRK GÜZEL

Köşegen, Üçgensel ve Simetrik Matrisler

Esas köşegen haricindeki tüm girdileri sıfır olan matrise **köşegen matris** denir.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Örn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Genel bir 4x4 lük üst üçgensel matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Genel bir 4x4 lük alt üçgensel matris

Bir kare A matrisine, $A = A^T$ ise **simetrik matris** denir.

Köşegen Matrislerin Tersi ve Kuvvetleri

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

$$A^{m+n} = A^m A^n = \begin{bmatrix} (a_1)^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2)^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_n)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_1)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_n)^n \end{bmatrix}$$

$$A^{m+n} = \begin{bmatrix} (a_1)^m (a_1)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2)^m (a_2)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_n)^m (a_n)^n \end{bmatrix}$$

$$A^{m+n} = \begin{bmatrix} (a_1)^{m+n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2)^{m+n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_n)^{m+n} \end{bmatrix}$$

Kaynak: http://output.to/sideway/default.asp?qno=100800013

Verilen A matrisi için $A^{-1} = ?\ , A^{5} = ?\,, A^{-5} = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A^{5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \qquad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

Teorem : A ve B büyükleri aynı olan simetrik matrisler ve k bir skaler ise
a-) A^T simetriktir.
b-) $A + B$ ve $A - B$ simetriktir.
c-) kA simetriktir.

Teorem: İki simetrik matrisin çarpımı ancak ve ancak matrisler değişmeli ise simetriktir.

Teorem: A tersi alınabilir simetrik bir matris ise A^{-1} simetriktir.

Teorem: Bir A matrisi ve onun devriğinin (transpose) çarpımı simetriktir. A tersi alınabilir bir matris ise AA^T ve A^TA da tersi alınabilir ve simetrik matrislerdir.

Örn:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$