EEM 102 Lineer Cebir

Bölüm 2

Dr. Öğr. Üyesi Başak Esin KÖKTÜRK GÜZEL

Kofaktör Açılımı ile Determinant

Kare bir A matrisinin, $\boldsymbol{a_{ij}}$ **girdisinin minörü** $\boldsymbol{M_{ij}}$ ile gösterilir ve i. Satır ve j. Sütunun silinmesi ile oluşan matrisin determinantına eşittir.

$(-1)^{i+j}M_{ij}$ sayısı $\boldsymbol{a_{ij}}$ **girdisinin kofaktörü** olarak tanımlanır ve C_{ij} ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

a_{11} girdisinin minörü M_{11}

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

a_{11} girdisinin kofaktörü C_{11}

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Kofaktör Açılımı ile Determinant

a_{32} girdisinin minörü M_{32}

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

a_{32} girdisinin kofaktörü C_{32}

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Bir M_{ij} minörüne karşılık gelen C_{ij} kofaktörü, ya minörün aynısıdır ya da negatif işaretlisidir. İşaret dama tahtası görünümüne uygun olarak belirlenir.

$$M_{11} = C_{11}, \quad M_{21} = -C_{21}$$

Kofaktör Açılımı ile Determinant

$n \times n$ lik bir A matrisinin herhangi bir satır veya sütunundak **girdilerin ve o girdilere karşılık gelen kofaktörlerin çarpılması** ve **bu çarpımların toplanması** ile elde edilen sonuca A matrisinin **determinantı** denir.

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$ $\longrightarrow$ j. sütun boyunca kofaktör açılımı

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ $\longrightarrow$ i. satır boyunca kofaktör açılımı

Kofaktör Açılımı ile Determinant

A matrisinin determinantını hesaplayın.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

Satır veya Sütunun Seçimi

A matrisinin determinantını en az işlem yaparak bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1+2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Alt Üçgensel Bir Matrisin Determinantı

4x4 lük A matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} | a_{44} | = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$A, n \times n$ lik bir üçgensel matris ise (alt üçgensel, üst üçgensel veya köşegen) $\det(A)$ esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımıdır.

2×2 ve 3×3 lük Matrislerin Determinantı

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right.$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$

Satır İndirgeme ile Determinant Hesabı

Teorem: Bir kare A matrisinin sıfır satır veya sütunu var ise $\det(A) = 0$ dır.

Teorem: A kare matris olsun. Bu durumda $\det(A) = \det(A^T)$ dır.

A, $\mathrm{n} \times n$ lik bir matris olsun.

a-) B matrisi, A nın sadece bir satır veya sütununun bir k sabiti ile çarpıldığında elde ediliyorsa
$\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{kdet}(\boldsymbol{A})$ dır.

b-) B matrisi, A nın iki satır veya iki sütununun yer değiştirmesiyle elde ediliyorsa
$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$ dır.

c-) B matrisi, A nın bir satırının bir katının diğer bir satırına eklendiğinde veya bir sütununun bir katının diğer bir sütununa eklemesi ile elde ediliyorsa
$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$ dır.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = k\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = \det(A)$$

Elementer Matrisler

Doğrusal cebirde, bir birim matriste yalnızca bir tane elementer satır işlem yapılarak elde edilen matrislere **elementer matris** denir.

Teorem: $\mathrm{E}, n \times n$ lik bir elementer matris olsun.
a-) E, I_n nin bir satırının sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpılmasından elde ediliyorsa $\det(E) = k$ dır.
b-) E, I_n nin iki satırının yer değiştirmesi ile elde ediliyorsa $\det(E) = -1$ dir.
c-) E, I_n nin bir satırının bir katının başka bir satırına eklenmesiyle elde ediliyorsa $\det(E) = 1$ dir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Teorem: A, iki orantılı satırı veya iki orantılı sütunu olan bir kare matris ise $\det(A) = 0$ dır.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

Satır İşlemleri Kullanarak Determinant Hesabı

A yı satırca eşelon forma (üst üçgensel) indirgeyerek A matrisinin determinantını bulun.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

Determinantın Özellikleri

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \stackrel{?}{=} \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{det}(\boldsymbol{B})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1$$
$$\det(B) = 8$$
$$\det(A+B) = 23$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{det}(\boldsymbol{B})$$

B $n \times n$ lik bir matris ve E $n \times n$ lik bir elementer matris ise $\mathbf{det}(\boldsymbol{EB}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{E})\,\mathbf{det}(\boldsymbol{B})$ dir.

Teorem: Kare A matrisi ancak ve ancak $\det(A) \neq 0$ ise tersi alınabilirdir.

Örn: Aşağıdaki A ve B matrisleri için $det(A), det(B)$ ve $det(AB)$ yi hesaplayınız

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 1, \quad \det(B) = -23.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} \qquad \det(AB) = -23$$

Teorem: A ve B boyutları aynı olan kare matrisler ise $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ dir.

Teorem: A nın teri varsa $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ dır.

İspat:

$$A^{-1}A = I$$

$$\det(A^{-1}A) = \det(I)$$

$$\det(A^{-1})\det(A) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Teorem: A, B ve C sadece bir satırları (r. satır diyelim) farklı olan $n \times n$ lik matrisler olsun ve C nin r. satırının A ve B matrislerinin r. satırlarındaki girdilerin toplamı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

olur.

Aynı sonuç sütunlar için de geçerli midir?   EVET!

Örn:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A nın Eki

A herhangi bir $n \times n$ lik matris ve a_{ij} nin kofaktörü C_{ij} ise

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & & \ddots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrisine A nın kofaktörler matrisi denir. Bu matrisin devriği A nın eki (adjoint) olarak adlandırılır ve $adj(A)$ ile gösterilir.

Örn: A matrisinin ekini hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

A nın Eki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Matrisin Ekini Kullanarak Determinant Hesabı

Teorem: A tersi alınabilir bir matris ise $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$ dır.

$İspat: Ödev!$

Örn: A matrisinin determinantını ekini kullanarak hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

Kramer Kuralı

$\det(A) \neq 0$ olmak üzere, n bilinmeyenli lineer denklem sistemi $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ile ifade edilir ve tek çözüme sahiptir. Bu çözüm;

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dır. A_j, A nın j. Sütunundaki girdilerin yerine b matrisindeki girdilerin konulması ile elde edilen matristir.

Kramer Kuralı (ispat)

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lineer sisteminin çözümü

$$x = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \ \ldots + b_n C_{nj}}{\det(A)}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A_j, A nın j. sütundaki girdilerinin farklı olması ile oluştuğu için j. Sütundan kofaktör açılımı aynıdır.

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

Bu sonucu x_j denkleminde yerine koyalım.

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Aşağıdaki lineer denklem sistemini Kramer Kuralı ile çözünüz.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$