Genel Vektör Uzayları

Başak Esin KÖKTÜRK GÜZEL

8 Nisan 2019

Vektör Uzayı

v,u ve **w** objeleri ve k ve m skalerleri V'de tanımlı olsun. Eğer V kümesinin elemanları bellirli aksiyomları yerine getiriyor ise V özel tanımlanmış bir kümedir ve **Vektör uzayı** olarak adlandırılır.

1. Eğer **u** ve **v**, V kümesi içerisinde ise **u+v** de V kümesi içerisindedir.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. V'deki her **u** için $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$ eşitliğini sağlayan bir **0** objesi vardır.
5. V'deki her **u** için $\mathbf{u}+(\mathbf{-u}) = (\mathbf{-u})+\mathbf{u} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan ve **u** nun negatifi denen $-\mathbf{u}$ objesi vardır.
6. $k\mathbf{u}$ objesi de V nin elemanıdır.
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k+m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Örn: V, sadece $\mathbf{0}$ objesinden oluşan bir küme olsun ve

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0} \quad \text{ve} \quad k\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

olarak tanımlayalım. Tüm vektör uzayı aksiyomlarını sağladığı için V yi **sıfır vektör uzayı** olarak adlandırırız.

Örn: $V=R^n$ olsun ve V üzerindeki vektör uzayı işlemlerini n-lilerin her zamanki toplama ve skalerle çarpma işlemi olarak tanımlayalım.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$$

$$k\mathbf{u}=(ku_1,ku_2,\ldots,ku_n)$$

$V=R^n$ kümesi toplama ve skalerle çarpma altında kapalıdır, çünkü sonuçlar yine n-liler şeklinde oluşur ve aksiyomları sağlarlar.

Alt Uzay

W, V vektör uzayının bir alt kümesi olsun. W kümesi de V vektör uzayında tanımlı toplama ve skalerle çarpma altında bir vektör uzayı ise, W, V nin **alt uzayı** denir.

Theorem

W, V vektör uzayının bir alt kümesi ve

- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \to \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
- $\mathbf{u} \in W, c \in R \to c\mathbf{u} \in W$

şartlarını sağlıyorsa W, V nin alt uzayıdır.

Örn: $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_2 = 0\}$ kümesi R^3'ün bir alt uzayı mıdır?

1. Şart: $w_1 + w_2 \in W$?
$w_1 = (2, 0, -1) \quad w_2 = (1, 0, 2) \rightarrow w_1 + w_2 = (3, 0, 1)$ ✓
2. Şart: $(x_1, 0, x_3) \in R^3$ ve $c \in R \rightarrow c(x_1, 0, x_2) \in W$?
$(cx_1, 0, cx_3) \in W$ ✓

Alt Uzay

W, R^3 vektör uzayının alt uzayıdır.

Örn: $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 = 2\}$ kümesi R^3 ün bir alt uzayı mıdır?
1. Şart: $v_1 + v_2 \in V$?
$v_1 = (1, 1, -1) \quad v_2 = (-2, 4, 5) \rightarrow v_1 + v_2 = (-1, 5, 4)$ ✗
2. Şart: $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ ve $c \in R \rightarrow c(x_1, x_2, x_2) \in V$?
$(cx_1, c_x 2, cx_3) \notin V$ ✗

Sadece $c = 1$ olduğu zaman geçerli!

Alt Uzay

V, R^3 vektör uzayının alt uzayı **değildir**.

Theorem

Eğer $W_1, W_2, \ldots, W_r$, V nin alt uzayları ise bu alt uzayların kesişimi de V nin bir alt uzayıdır.

Tanım

V vektör uzayında tanımlı bir $\mathbf{w}$ vektörü olsun. Eğer $\mathbf{w}$, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ skalerleri ile

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r$$

formunda ifade edilebiliyorsa $\mathbf{w}$ ya V deki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektörlerinin **lineer kombinasyonu** denir.

Teorem

Eğer $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$, V vektör uzayının boş olmayan bir kümesi ise,

1. S deki tüm olası lineer kombinasyonlarının kümesi W, V nin bir alt uzayıdır.
2. (a) şıkkındaki W kümesi, V nin S deki tüm vektörlerini içeren "**en küçük**" alt uzayıdır, yani bu vektörleri içeren diğer alt uzaylar W'yu kapsar.

Tanım

Bir V vektör uzayının bütün elemanları $w_1, w_2, \ldots, w_r$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabiliyorsa bu vektörlerin oluşturduğu $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ kümesi bu uzayı **gerer** ve

$$span(S)$$

ile gösterilir.

Örn: $S = \{\binom{1}{2}, \binom{-1}{1}\}$ kümesi $V = R^2$ uzayını gerer mi?
1. adım : R^2 de rastgele bir vektör seçelim. $\binom{a}{b} \in R^2$

2.adım : $c_1\binom{1}{2} + c_2\binom{-1}{1} = \binom{a}{b}$

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= a \\ 2c_1 + c_2 &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a+b}{3} \\ c_2 &= \frac{b-2a}{3} \end{aligned}$$

S kümesi R^2 uzayını gerer.

Örn: $S = \{\binom{2}{4}, \binom{-1}{-2}\}$ kümesi R^2 uzayını gerer mi?
1. adım : R^2 de rastgele bir vektör seçelim. $\binom{a}{b} \in R^2$

2.adım : $c_1\binom{2}{4} + c_2\binom{-1}{-2} = \binom{a}{b}$

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 &= a \\ 4c_1 - 2c_2 &= b \end{aligned}$$

Çözüm yok! S kümesi R^2 uzayını germez.

$v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,0,1), v_3 = (2,1,3)$ ün R^3 vektör uzayını gerip germediğini kontrol ediniz.

1. adım : R^3 de rastgele bir vektör seçelim. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$

2.adım : a vektörünü v_1, v_2, v_3 ün lineer kombinasyonu olarak ifade edebilir miyiz?

$$\begin{aligned} a &= k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 \\ (a_1, a_2, a_3) &= k_1(1,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(2,1,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= a_1 \\ k_1 + k_3 &= a_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Sistemin tutarlı olup olmadığına kat sayı matrisi oluşturarak karar verebiliriz.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sistemin tutarlı olup olmadığına nasıl karar verelim?
$det(K) =?$
$det(K) = 0$ olduğu için çözüm yoktur.

v_1, v_2, v_3, R^3 ü germez.

Teorem

n bilinmeyenli bir $Ax = 0$ homojen lineer sisteminin çözüm kümesi R^n in bir alt uzayıdır.

W verilen sistemin çözüm kümesi olsun. W kümesi en azından $x = 0$ aşikar çözümünü içereceği için boş küme değildir.
W nun R^n in bir alt uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için x_1 ve x_2 W da vektörler olsun. Bu vektörler $Ax = 0$ ın çözümü oldukları için

$$Ax_1 = 0, \quad Ax_2 = 0$$

dır. Matris çarpımının dağılma özelliğinden

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$$

çıkar. Bu durumda W toplama altında kapalıdır.
k herhangi bir skaler olsun.

$$A(kx_1) = kAx_1 = k0 = 0$$

çıkar. Dolayısı ile W skalerle çarpma altında kapalıdır.

Homojen Sistemlerin Çözüm Uzayı

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lineer sisteminin çözüm uzayını bulunuz.
$x = 2s - 3t, y = s, z = t$

$$x - 2y + 3z = 0$$

eşitliği çıkar.
Bu da orjinden geçen (d=0) ve normali $n = (1, -2, 3)$ olan bir düzlemi verir.

Lineer Bağımsızlık

Eğer $S = v_1, v_2, \ldots, V_r,$ V vektör uzayının boş olmayan kümesi ise

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$$

vektör denkleminin en az bir çözümü vardır.

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad \ldots k_r = 0$$

Buna aşikar çözüm denir. Eğer bu çözüm tek çözüm ise S ye lineer bağımsız küme denir. Aşikar çözüm dışında başka çözümlerde var ise S lineer bağımlı kümedir.

R^3 deki $u = (1,1,0), v = (0,1,0), w = (1,0,1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını gösterin!

$$c_1(1,1,0) + c_2(0,1,0) + c_3(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sisteminin çözümünden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda u, v, w vektörleri lineer bağımsızdır.

R^3 uzayında verilen $u = (2, 1, -4), v = (1, 0, -1), w = (x, 4, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı oldukları bilindiğine göre x kaçtır?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x = -9$ olmalı.

Örn: Aşağıdaki polinomların P_n de lineer bağımsız bir küme olduklarını gösterin.

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$$

Polinomları

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = x^2, \ldots p_n = x^n$$

şeklinde gösterelim.

$$a_o p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n = 0$$

Denkleminin

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

aşikar çözümüne sahip olduğunu göstermemiz gerekli.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

n dereceli polinomun çözüm kümesi

n dereceli bir polinomun en fazla n tane çözümü vardır. (1) de belirtilen her katsayının 0 olmaması durumunda sonsuz çözüm oluşur. Bu nedenle (1) sadece aşikar çözüme sahiptir.

Örn: Aşağıdaki polinomların P^2 de lineer bağımsız olup olmadıklarını gösteriniz.

$$p_1 = 1 - x \quad p_2 = 5 + 3_x - 2x^2 \quad p_3 = 1 + 3x - x^2$$

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 = 0$$

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3_x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0$$

Katsayıları sıfıra eşitleyerek sistemin aşikar çözümü olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Katsayı matrisini yazıp determinantına bakalım.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\{p_1, p_2, p_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

Koordinatlar ve Bazlar

Tanım

V herhangi bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V deki vektörlerin sonlu bir kümesi olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa S ye V nin bir **bazı** denir.

a. S lineer bağımsızdır.
b. S, V yi gerer.

Tanım

Bir vektör uzayının bazı, o vektör uzayındaki tüm vektörleri oluşturabilecek en az elemana sahip kümedir.

R^n de standart bazlar,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0) \quad \ldots \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

şeklindedir. Çünkü bu vektörler R^n i gerer ve lineer bağımsızdırlar.

Örn: $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 9, 0), v_3 = (3, 3, 4)$ vektörlerinin R^3 için bir baz oluşturduğunu gösteriniz.
Lineer bağımsız olduklarını göstermeliyiz.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Uzayı gerdiklerini göstermeliyiz.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = b$$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 + 4c_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = -1$$

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin 2×2 lik matrislerin vektör uzayı M_{22} için bir baz oluşturduğunu gösteriniz. Matrislerin lineer bağımsız olduğunu ve uzayı gerdiğini göstermeliyiz.

Lineer bağımsızlık için

$$c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 M_3 + c_4 M_4 = \mathbf{0}$$

denkleminin aşikar çözümü olduğunu göstermeliyiz.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerin M_{22} yi gerdiğini ispatlamak için her 2×2 lik

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinin

$$c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 M_3 + c_4 M_4 = \mathbf{B}$$

şeklinde ifade edilebilmesi gerekir.

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

M_1, M_2, M_3 ve M_4, M_{mn} uzayı için baz oluşturur.

Örn: $S = \{t^2+1, t-1, 2t+2\}$ kümesinin ikinci dereceden polinomların P_2 vektör uzayı için baz olup olmadığını belirleyin.

$$c_1(t^2+1) + c_2(t-1) + c_3(2t+2) = at^2 + bt + c$$

$$\begin{aligned} c_1 &= a \\ c_2 + 2c_3 &= b \\ c_1 - c_2 + 2c_3 &= c \end{aligned}$$

S kümesi P_2 vektör uzayını gerer.

$$c_1(t^2+1) + c_2(t-1) + c_3(2t+2) = 0$$

$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ aşikar çözümü çıkar. Bu nedenle S kümesi lineer bağısızdır.

S kümesi P_2 vektör uzayı için bir baz oluşturur.

Tanım

Eğer $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bir vektör uzayı için bir baz ve

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

bir **v** vektörünün S cinsinden ifadesi ise, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ skalerlerine **v** nin S'ye göre **koordinatları** denir. Bu koordinatlardan oluşturulan R^n deki $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ vektörüne **v nin S ye göre koordinat vektörü** denir ve

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ile gösterilir.

R^2 uzayında $S = \{(1,3),(2,1)\}$ bir baz olmak üzere $v = (2,3)$ vektörünün S kümesine göre koordinat vektörünü bulun.

$$c_1(1,3) + c_2(2,1) = (2,3)$$

$$(c_1 + 2c_1, 3c_1 + c_2) = (2,3)$$

$$c_1 = 4/5 \quad c_2 = 3/5$$

$$(v)_S = (4/5, 3/5)$$

$$v_1 = (1,2,1) \quad v_2 = (2,9,0) \quad v_3 = (3,3,4)$$

vektörleri R^3 uzayı için baz oluştururlar. $v = (5,-1,9)$ vektörünün $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ bazına göre koordinat vektörlerini bulunuz.

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$(5,-1,9) = c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4)$$

$$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$$

$$(v)_S = (1,-1,2)$$

Teorem

Sonlu boyutlu bir vektör uzayının her bazı aynı sayıda vektöre sahiptir.

Teorem

V sonlu boyutu bir vektör uzayı ve $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ herhangi bir baz olsun.

a. Eğer bir küme n den fazla vektöre sahipse lineer bağımlıdır.
b. Eğer bir küme n den az vektöre sahipse V yi germez.

Tanım

Bir sonlu-boyutlu V vektör uzayınınn **boyutu** $dim(V)$ ile gösterilir ve V nin bir bazındaki vektör sayısı olarak tanımlanır. Ayrıca sıfır vektör uzayının boyutu sıfır olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} dim(R^n) &= n \\ dim(P_n) &= n+1 \\ dim(M_{mn}) &= mn \end{aligned}$$

Örn: Aşağıdaki lineer denklem sisteminin bir bazını ve boyutunu bulunuz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Gauss-Jordan yok etme yöntemi ile

$$x_1 = -s - t \quad x_2 = s \quad x_3 = -t \quad x_4 = 0 \quad x_5 = t$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s - t, s, -t, 0, t)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = s(-1, 1, 0, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 0, 1)$$

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0) \quad v_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$$

v_1 ve v_2 birbirinin lineer katı olmadığı için lineer bağımsızdır ve çözüm uzayını gererler. Bu nedenle çözüm uzayının boyutu 2 dir.

Baz Değişimi

$B = \{u_1, u_2\}$ ve $B' = \{u_1', u_2'\}$, V vektör uzayının 2 bazı olsun. Yeni baz vektörlerini eski baza göre yazalım.

$$u_1' = au_1 + bu_2$$
$$u_2' = cu_1 + du_2$$

$$[u_1']_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, [u_2']_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

v, V vektör uzayında herhangi bir vektör olsun ve

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix}$$

yeni koordinat vektörü olsun.

Şimdi v yi eski B bazı cinsinden ifade edelim.

$$v = k_1(au_1 + bu_2) + k_2(cu_1 + du_2)$$

$$v = (k_1 a + k_2 c)u_1 + (k_1 b + k_2 d)u_2$$

Böylece v nin eski koordinatı

$$[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [v]_{B'}$$

Böylelikle yeni koordinat vektörü $[v]_{B'}$ nün, eski koordinat vektörü $[v]_B$ yi

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

matrisiyle soldan çarparak bulabiliriz.

Baz Değişimi

Eğer bir V vektör uzayının eski bir $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bazından yeni bir $B' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ bazına baz değişikliği yaparsak, V deki her v vektörü için, eski $[v]_B$ koordinat vektörü, yeni $[v]_{B'}$ koordinat vektörüne aşağıdaki denklem ile bağlıdır.

$$[v]_B = P[v]_{B'}$$

Burada P nin sütunları yeni baz vektörlerinin, eski baza göre koordinat vektörleridir. P nin sütunları şöyledir:

$$[u'_1]_B, [u'_2]_B, \ldots, [u'_n]_B$$

$$P_{B' \to B} = \big[[u'_1]_B \;\; | \;\; [u'_2]_B \;\; | \;\; \ldots \;\; [u'_n]_B \big]$$

$$P_{B \to B'} = \big[[u_1]_{B'} \;\; | \;\; [u_2]_{B'} \;\; | \;\; \ldots \;\; [u_n]_{B'} \big]$$

Örn: R^2 de $B = \{u_1, u_2\}$ ve $B' = \{u'_1, u'_2\}$ baz kümeleri olsun.

$$u_1 = (1,0) \quad u_2 = (0,1) \quad u'_1 = (1,1) \quad u'_2 = (2,1)$$

B' den B ye geçiş matrisini($P_{B' \to B}$) bulunuz.

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 + u_2 \\ u'_2 &= 2u_1 + u_2 \end{aligned}$$

$$[u'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [u'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B den B' ye geçiş matrisini $(P_{B\to B'})$ bulun.

$$u_1 = -u_1' + u_2'$$
$$u_2 = 2u_1' - u_2'$$

$$[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Eğer B ve B' sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bazları ise

$$(P_{B' \to B})(P_{B \to B'}) = (P_{B \to B}) = I$$

Teorem

Eğer P sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir B' bazından B bazına geçiş matrisi ise, P tersi alınabilirdir ve P^{-1}, B den B' ye geçiş matrisidir.

$P_{B \to B'}$ yü hesaplamak için

$$[\text{yeni baz} \mid \text{eski baz}] \xrightarrow[\text{işlemleri}]{\text{satır}} [\mathbf{I} | P_{B \to B'}]$$

Örn:

$$u_1 = (1,0) \quad u_2 = (0,1) \quad u_1' = (1,1) \quad u_2' = (2,1)$$

$P_{B' \to B} =?$