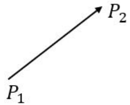
Euclid Vektör Uzayları

Başak Esin KÖKTÜRK GÜZEL

4 Nisan 2019

$P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları arasında yer alan $\mathbf{v} = \overrightarrow{(P_1, P_2)}$ vektörü

$$\mathbf{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



şeklinde tanımlanır.

Örn: Başlangıç noktası $(3, 2, 1)$ ve bitiş noktası $(-1, 4, 2)$ olan $\mathbf{v}$ vektörününün bileşenlerini yazınız.

$$\begin{aligned} v &= (-1-3, 4-2, 2-1) \\ v &= (-4, 2, 1) \end{aligned}$$

Tanım

n bir pozitif tam sayı ise bir **sıralı** $n-$**li**, **n** uzunluklu bir reel sayı dizisidir $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Tüm sıralı $n -$ *liler* kümesine **n** $-$ *uzay* denir ve R^n ile gösterilir.

Tanım

R^n deki $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektörleri için

$$v_1 = w_1 \quad v_2 = w_2 \quad \ldots \quad v_n = w_n$$

ise $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ (eş vektörler) denir.

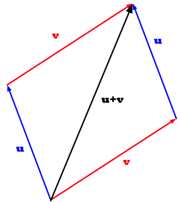
Örn: $(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$ eşitliği ancak ve ancak $a = 1, b = -4$, $c = 2, d = 7$ olduğu zaman geçerlidir.

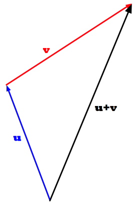
Vektörlerde Toplama

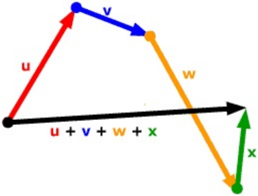
v ve **w** vektörleri 2-uzayda ya da 3-uzayda konumlandırılmış vektörler olsun. Bu iki vektörün toplamını paralelkenar yöntemi ya da üçgen kuralı ile bulabiliriz ve

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

dir.



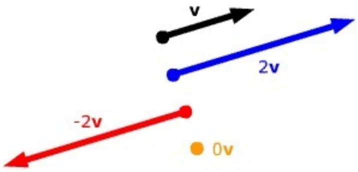




Skaler ile Çarpma

Eğer **v**, 2-uzay ya da 3-uzayda sıfırdan farklı bir vektör ve k sıfırdan farklı bir skaler ise **v** nin k skaleri ile çarpımının

- uzunluğu: **v** vektörünün uzunluğu ile k skalerinin çarpımına eşit,
- yönü : k pozitif ise **v** vektörü ile aynı, negatif ise **v** vektörünün yönünün zıttıdır.



Tanım

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, R^n de vektörler ve k herhangi bir skaler ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \\ k\mathbf{v} &= (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n) \\ -\mathbf{v} &= (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n) \\ \mathbf{w} - \mathbf{v} &= \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örn: $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ ve $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$ ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= ? \\ -\mathbf{w} &= ? \\ 2\mathbf{v} &= ? \\ \mathbf{v} - \mathbf{w} &= ? \end{aligned}$$

Teorem

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, R^n de vektörler ve k ve m skalerler olsun.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \mathbf{v}+\mathbf{u} \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u} &= \mathbf{u} \\
\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\
k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\mathbf{u}+k\mathbf{v} \\
(k+m)\mathbf{u} &= k\mathbf{u}+m\mathbf{u} \\
k(m\mathbf{u}) &= (km)\mathbf{u} \\
1\mathbf{u} &= \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Teorem

v, R^n de vektör ve k skaler ise

$$\begin{aligned} \mathbf{0v} &= \mathbf{0} \\ k\mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ (-1)\mathbf{v} &= \mathbf{-v} \end{aligned}$$

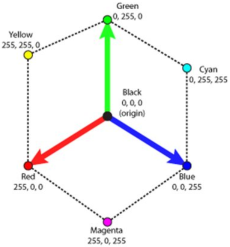
dir.

Tanım

w, R^n de bir vektör ve $k_1, k_2, \ldots, k_r$ skalerler olmak üzere **w** eğer,

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, **w** ya R^n deki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektörlerinin **lineer kombinasyonu** denir.



$$r = (255, 0, 0) \qquad c = 0r + 1g + 1b$$
$$g = (0, 255, 0) \qquad y = 1r + 1g + 0b$$
$$b = (0, 0, 255) \qquad m = 1r + 0g + 1b$$

Norm

R^n de tanımlı $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektörünün **normu** (**uzunluğu** ya da **büyüklüğü** olarak da adlandırılır) $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Örn: R^3 deki $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ vektörünün normunu bulunuz.

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

Örn: R^4 deki $\mathbf{v} = (-1, 4, 5, 1)$ vektörünün normunu bulunuz.

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{43}$$

Teorem

$\mathbf{v}$, R^n de bir vektör ve k herhangi bir skaler ise

- $\|\mathbf{v}\| \geq 0$
- $\|\mathbf{v}\| = 0$ ancak ve ancak $\mathbf{v} = 0$
- $\|k\mathbf{v}\| = |k| \, \|\mathbf{v}\|$ dir.

Birim Vektör

Normu 1 olan vektöre birim vektör denir. v, R^n de sıfırdan farklı bir vektör ise

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$ ile aynı yönlü birim vektörü tanımlar.

Örn: $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$ ile aynı yönlü $\mathbf{u}$ birim vektörünü bulunuz.

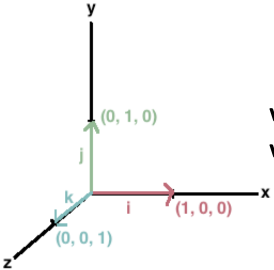
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$$

$$\mathbf{u} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$$

Tanım

R^2 veya R^3 te bir dik koordinat sistemi ortaya konulduğu zaman, koordinat eksenlerinin pozitif yönlerindeki birim vektörlere standart birim vektörler denir.
Birim vektörler R^3 te $\mathbf{i} = (1,0,0) \quad \mathbf{j} = (0,1,0) \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$ şeklinde ifade edilir.



$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)$$
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Genel olarak R^n deki standart birim vektörler

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0) \quad \ldots \qquad \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu durumda R^n deki her $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektörü şu şekilde ifade edilebilir.

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n$$

Tanım

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, R^n de tanımlı noktalar olsun. u ve v arasındaki uzaklık $d(\mathbf{u,v})$

$$d(\mathbf{u,v}) = \|\mathbf{u\text{-}v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

şeklinde tanımlanır.

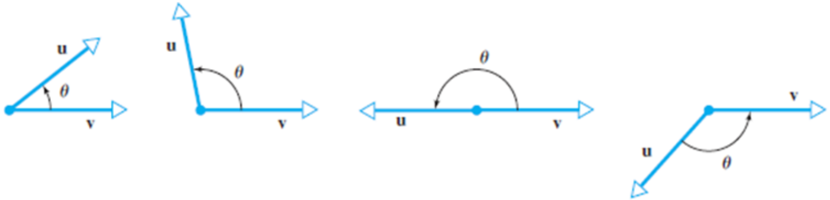
Örn: $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$, $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$ ise **u** ve **v** noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayın.

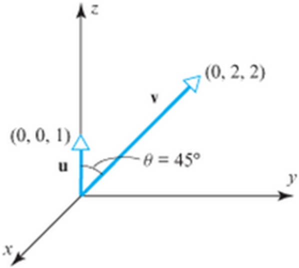
$$d(\mathbf{u,v}) = \|\mathbf{u\text{-}v}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$

Tanım

u ve **v**, R^2 veya R^3 te sıfırdan farklı vektörler, θ ise **u** ve **v** vektörü arasındaki açı olsun. Bu durumda **u** ve **v** nin skaler çarpımı (**Euclid iç çarpımı**) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, cos\theta$$





Örn: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ?$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, cos\theta$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$$

Tanım

R^n de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ olsun $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ nin skaler çarpımı (Euclid iç çarpımı) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

şeklinde tanımlanır.

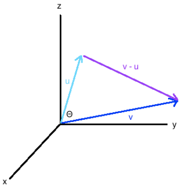
Theorem

u, v ve w, R^n de vektörler ve k skaler ise

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ Simetri Özelliği
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ Dağılma özelliği
- $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ Homojenlik Özelliği
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ ancak ve ancak $\mathbf{v} = 0$ ie geçerlidir. Pozitiflik Özelliği

$$\|\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

$$\|\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,cos\theta$$



$$\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,cos\theta = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}\|^2)$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$\|\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

Yerlerine koyup sadeleştirelim.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \;= \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, cos\theta$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}\right)$$

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

R^n de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ise

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \;| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Theorem

u,v ve **w**, R^n de vektörler olsun. Bu durumda

- $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Vektörler için üçgen eşitsizliği)
- $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$ (Uzaklıklar için üçgen eşitsizliği)

eşitsizlikleri geçerlidir.

Theorem

u ve **v**, R^n de vektörler ise

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

Theorem

u ve **v**, R^n de tanımlı vektörler ise Euclid iç çarpımları

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

Örn: $A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$ olduğunu aşağıdaki örnekler ile gösteriniz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 10\\ 5\end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=7(-2)+10(0)+5(5)=11$$

$$\mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}=-1(-7)+2(4)+4(-1)=11$$

Ortogonallik

Tanım

R^n de sıfırdan farklı iki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörü için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ise $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörü birbirlerine **ortogonaldir** denir.

Örn: $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ ve $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ vektörlerinin R^4 de ortogonal olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Standart birim vektörler kümesi $S = \{\mathbf{i,j,k}\}$ nin R^3 te ortogonal küme olduğunu gösterin.

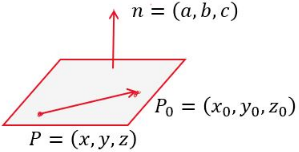
$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (1,0,0) \\ \mathbf{j} &= (0,1,0) \\ \mathbf{k} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0 \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} &= (1,0,0)\cdot(0,0,1) = 0 \end{aligned}$$

Tanım

Bir doğrunun doğrultusuna dik olan vektöre o doğrunun **normal** vektörü denir.

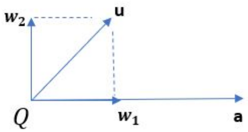
$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$



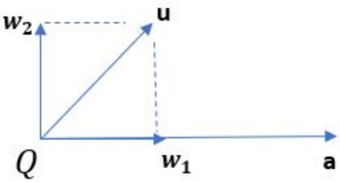
R^3 de
$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,
$n(a, b, c)$
$n \cdot \overrightarrow{P_0P} =$
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$
$ax + by + cz + d = 0$

Tanım

u, v ve a, R^n de vektörler ve $a \neq 0$ ise, u vektörünü a ile aynı doğrultulu w_1 ve a vektörüne ortogonal w_2 vektörü cinsinden $u = w_1 + w_2$ şeklinde tek biçimde ifade edebiliriz.



$$
\begin{aligned}
w_1 &= ka \\
u &= w_1 + w_2 = ka + w_2 \\
u \cdot a &= (ka + w_2) \cdot a = k\left\|a\right\|^2 + (w_2 \cdot a) \\
u \cdot a &= k\left\|a\right\|^2 \\
k &= \frac{u \cdot a}{\left\|a\right\|^2} \\
w_2 &= u - w_1 = u - ka = u - \frac{u \cdot a}{\left\|a\right\|^2} a
\end{aligned}
$$



Tanım

$\mathbf{w}_1$ vektörüne $\mathbf{u}$ nun a üzerine ortogonal izdüşümü denir ve $proj_a u$ ile gösterilir. $\mathbf{w}_2$ ise $\mathbf{u}$ nun $\mathbf{a}$ ya ortogonal vektör bileşeni olarak adlandırılır.

$$proj_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

Örn: $e_1 = (1,0)$ ve $e_2 = (0,1)$ vektörlerinin R^2 deki pozitif x ekseni ile θ açısı yapan L doğrusu üzerindeki ortogonal izdüşümünü bulunuz.

$proj_a e_1 = \frac{e_1 \cdot a}{\|a\|^2} a$

$a = (cos\theta, sin\theta)$

$\|a\| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1$

$e_1 \cdot a = cos\theta$

$proj_a e_1 = cos\theta(cos\theta, sin\theta)$

$proj_a e_1 = (cos^2\theta, cos\theta sin\theta)$

$u=(2,-1,3)$ ve $a=(4,-1,2)$ olsun. u'nun a boyunca vektör bileşenini ve u'nun a'ya ortogonal vektör bileşenini bulunuz.

$$u \cdot a = 15$$

$$\|a\|^2 = 21$$

$$\begin{aligned} proj_a u &= \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a \\ &= \frac{15}{21}(4,-1,2) \\ &= \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u - proj_a u &= (2,-1,3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) \\ &= \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right) \end{aligned}$$

u'nun a boyunca vektör bileşeninin normu

$$\begin{aligned} \|proj_a u\| &= \left\| \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a \right\| \\ &= \left| \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} \right| \|a\| \\ &= \frac{|u \cdot a|}{\|a\|^2} \|a\| \\ &= \frac{|u \cdot a|}{\|a\|} \end{aligned}$$

θ u ve a arasındaki açı olsun. Bu durumda,

$$|u \cdot a| = \|u\| \, \|a\| \, cos\theta$$

$$\|proj_a u\| = \|u\| \, cos\theta$$

Pisagor Teoremi

u ve v Euclid iç çarpımlı R^n de ortogonal vektörler ise

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

İspat

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2$$

Ortogonal oldukları için $u \cdot v = 0$,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bir noktanın($P_0(x_0, y_0, z_0)$) bir düzleme ($ax + by + cz + d = 0$) olan uzaklığı

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

İspat: $Q(x_1, y_1, z_1)$ düzlem üzerinde bir nokta olsun.

$$\begin{aligned}
D &= \left\| proj_n \overrightarrow{QP_0} \right\| \\
&= \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot n|}{\|n\|} \\
\overrightarrow{QP_0} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_0 - z_1) \\
\overrightarrow{QP_0} \cdot n &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z1) \\
\|n\| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\
d &= -ax_1 - by_1 - cz_1 \\
D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}$$

Örn: (1,-4,-3) noktası ile $2x - 3y + 6z = -1$ düzlemi arasındaki dik uzaklığı bulunuz.

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

Vektörel Çarpım (Kartezyen Çarpımı)

$u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$, R^3 de tanımlı vektörler olsun. $u \times v$ çarpımı determinant gösterimi ile

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

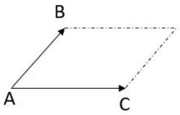
dır.

Örn : $u = (1, 2, -2)$, $v = (3, 0, 1)$ ise $u \times v$ nedir?

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$u \times v = (2, -7, -6)$$

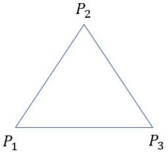
$u \times v$, u ve v ye diktir.



İki vektörün vektörel çarpımı, her iki vektöre de dik ve boyu bu iki vektörün üzerinde kurulan paralel kenarın alanına eşit yeni bir vektördür.

$$Alan = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$$

Köşe noktaları $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$ ve $P_3(0,4,3)$ olan üçgeninin alanını hesaplayınız.



Üçgenin alanı $\overrightarrow{P_1P_2}$ ve $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektörleri tarafından belirlenen paralel kenarın alanının yarısıdır.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= (-3,-2,2) \\
\overrightarrow{P_1P_3} &= (-2,2,3) \\
A &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}
$$

Vektör ve Skaler Çarpımını İçeren İlişkiler

u, v ve w, 3-uzayda vektörler ise

- $u \cdot (u \times v) = 0$
- $v \cdot (u \times v) = 0$
- $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - 2(u \times v)^2$
- $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$
- $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$

İspatları Ödev!

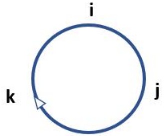
Vektör Çarpımının Özellikleri

u, v ve w, 3-uzayda herhangi vektörler ve k herhangi bir skaler olsun.

- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
- $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
- $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
- $u \times 0 = 0 \times u = 0$
- $u \times u = 0$

Standart birim vektörlerin $(i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1))$ kartezyen çarpımı

$$i \times j = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,0,1) = k$$



$i \times i = 0$	$j \times j = 0$	$k \times k = 0$
$i \times j = k$	$j \times k = i$	$k \times i = j$
$j \times i = -k$	$k \times j = -i$	$i \times k = -j$